

1^a Jornadas de Jóvenes Investigadores del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Extremadura

Programa y resúmenes

Jornadas organizadas por el Departamento de Matemáticas y el Instituto de
Matemáticas de la Universidad de Extremadura

Índice

Discurso de Bienvenida	3
Lista de ponentes invitados	5
Programa	6
Resúmenes	9

Discurso de Bienvenida

Queridos participantes,

El Departamento de Matemáticas, en colaboración con el Instituto de Investigación de Matemáticas de la Universidad de Extremadura (IMUEX), organiza estas primeras Jornadas de Jóvenes Investigadores con la idea de reunir a la nueva generación de jóvenes investigadores que se han formado o actualmente forman parte del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Extremadura, y ponerlos en contacto con estudiantes de últimos cursos de los Grados en Matemáticas y Estadística, jóvenes egresados y profesorado de estas áreas.

Esta reunión busca crear nuevos vínculos, así como dar a conocer las nuevas líneas de investigación en las que actualmente se encuentran trabajando los estudiantes de doctorado o jóvenes doctores dentro del Departamento de Matemáticas de la UEx, reforzando así el sentido de comunidad entre los miembros con más antigüedad y jóvenes en etapas iniciales de la carrera académica.

Os deseamos unas agradables y exitosas jornadas en el Salón de Actos de la Facultad de Ciencias de Badajoz y esperamos que encontréis en este evento un entorno adecuado para compartir vuestras ideas y vuestro tiempo.

Junio, 2025

Javier Cabello, Cristina Gutiérrez, Carmen Minuesa y José Navarro

Miembros del Comité Organizador 2025

Comité organizador

Javier Cabello Sánchez, Facultad de Ciencias, UEx

Cristina Gutiérrez Pérez, Facultad de Empresa, Finanzas y Turismo, UEx

Carmen Minuesa Abril, Facultad de Ciencias, UEx

José Navarro Garmendia, Facultad de Ciencias, UEx

Lista de ponentes invitados

1. Lucía Bautista Bárcena. Estadística e Investigación Operativa. Universidad de Extremadura
2. Luis Ángel Calderón Pérez. Análisis Matemático. Universidad de las Islas Baleares
3. José Manuel Fernández Barroso. Geometría. Universidad de Extremadura
4. José Carlos García Merino. Matemática Aplicada. Universidad Nacional de Educación a Distancia
5. Adrián Izquierdo Abril. Estadística e Investigación Operativa. Universidad de Extremadura
6. Manuel Martí Antonio. Estadística e Investigación Operativa. Universidad de Extremadura
7. Mario Martínez Pizarro. Estadística e Investigación Operativa. Universidad de Extremadura
8. Daniel Francisco Merino Delgado. Estadística e Investigación Operativa. Universidad de Extremadura
9. Daniel Morales González. Análisis Matemático. Universidad de Extremadura
10. Carlos Jesús Moreno Ávila. Álgebra. Universidad de Extremadura
11. Emmanuel Moreno Mejía. Estadística e Investigación Operativa. Universidad de Extremadura
12. Raúl Pino Velasco. Análisis Matemático. Universidad de Oviedo
13. Roberto Sebastián Trinidad Forte. Análisis Matemático. Universidad de las Islas Baleares

Programa

Jueves, 19 de junio

09:45-10:00 Bienvenida:

- D. Pedro J. Casero Linares, Decano de la Facultad de Ciencias
- D. Manuel Mota Medina, Director del Departamento de Matemáticas
- D. Jesús María Fernández Castillo, Director del Instituto de Matemáticas

10:00-10:30 Charla 1: *Modelización de estrategias de mantenimiento híbridas en sistemas con degradación múltiple*, Lucía Bautista.

10:30-11:00 Charla 2: *Ciclos límite en EDO a trozos*, Roberto Trinidad.

11:00-11:30 PAUSE - CAFÉ

11:30-12:00 Charla 3: *Matemáticas para la eficiencia: simulaciones rápidas y modelos ligeros en ingeniería*, José Carlos García.

12:00-12:30 Charla 4: *Redes Neuronales para la ayuda al diagnóstico de la enfermedad de Parkinson*, Daniel Merino.

12:30-13:00 Charla 5: *Espacios de Rochberg*, Raúl Pino.

13:00-16:30 PAUSA - COMIDA

16:30-17:00 Charla 6: *El problema de la Audibilidad en Geometría Riemanniana*, José Manuel Fernández.

17:00-17:30 Charla 7: *Cópulas y Valores Extremos Aplicados a Modelos Climáticos*, Mario Martínez.

17:30-18:00 Charla 8: *Explosiones por doquier. Resolución de singularidades y otros problemas*, Carlos Jesús Moreno.

Viernes, 20 de junio

10:00-10:30 Charla 9: *El Espacio de Banach de Cuasinormas*, Daniel Morales.

10:30-11:00 Charla 10: *Embeddings, similitud semántica y LLMs: Cálculo matemático y aplicaciones en procesamiento de lenguaje natural*, Adrián Izquierdo.

11:00-11:30 PAUSA - CAFÉ

11:30-12:00 Charla 11: *Cómo mantener un sistema bajo la combinación de procesos de degradación*, Emmanuel Moreno.

12:00-12:30 Charla 12: *Algunos problemas dinámicos en el plano*, Luis Ángel Calderón.

12:30-13:00 Charla 13: *Nuevos modelos predictivos de ateromatosis en individuos asintomáticos de mediana edad*, Manuel Martí.

14:30 - COMIDA

Resúmenes

Día 1: 19 de junio

Modelización de estrategias de mantenimiento híbridas en sistemas con degradación múltiple

Lucía Bautista Bárcena

luciabb@unex.es

Departamento de Matemáticas. Universidad de Extremadura, Badajoz (España)

Palabras Clave: Modelos de degradación; Mantenimiento imperfecto; Procesos semi-regenerativos

AMS: 90B25

Resumen

La creciente complejidad de los sistemas industriales modernos, compuestos por múltiples elementos interrelacionados y sujetos a diversos procesos de degradación, plantea desafíos para garantizar su fiabilidad y eficiencia operativa. Mi línea de investigación se centra en la modelización matemática de la dependencia y evolución de la degradación, la optimización de las intervenciones de mantenimiento, y el desarrollo de técnicas de inferencia estadística para estimar los parámetros del modelo. En este último punto, destaca la novedad de utilizar información de mantenimiento para esta estimación, incluso cuando los datos se recogen en diseños no balanceados y bajo diferentes estrategias de observación (entre, antes o después de las acciones de mantenimiento).

En particular, se propone y analiza una política de mantenimiento híbrida que combina enfoques basados en la condición y en la edad para un sistema con componentes heterogéneas, una situación común en turbinas eólicas o maquinaria compleja. El modelo distingue entre componentes que experimentan un proceso de degradación a lo largo del tiempo, modelado mediante un enfoque de tiempo de retardo con tres estados, y componentes que no muestran signos de deterioro antes de fallar. El fallo de cualquier componente crea una oportunidad para realizar mantenimiento preventivo en el resto, considerando su condición específica y su edad. El objetivo principal es identificar la política de mantenimiento que minimiza el coste esperado a largo plazo, considerando los costes de las diferentes intervenciones. Dada la dificultad de aplicar técnicas de renovación tradicionales debido a que las acciones se realizan a nivel de componente, se emplean técnicas semi-regenerativas que permiten modelizar la complejidad del sistema y evaluar la política propuesta.

Agradecimientos: Este trabajo cuenta con el apoyo del Ministerio de Ciencia e Innovación, España (Proyecto PID2021-123737NB-I00).

Referencias

- [1] Nguyen D.T., Dijoux Y., Fouladirad M. (2017). Analytical properties of an imperfect repair model and application in preventive maintenance scheduling. *European Journal of Operational Research*, 256(2), 439–453.
- [2] Shafiee M., Finkelstein L. (2015). An optimal age-based group maintenance policy for multi-unit degrading systems. *Reliability Engineering & System Safety*, 132, 164–175.
- [3] Zheng R., Zhou Y. (2022). A dynamic inspection and replacement policy for a two-unit production system subject to interdependence. *Applied Mathematical Modelling*, 103, 221–237.

Ciclos límite en EDO a trozos

Roberto Trinidad Forte

rtrinidaq@alumnosunex.es

Departamento de Ciencias Matemáticas e Informática, Universitat de les Illes Balears, 07122 Palma, España

Palabras Clave: Ciclos límite, Solución periódica, EDO a trozos

AMS: 34C25

Resumen

El decimosexto problema de Hilbert plantea una de las cuestiones más emblemáticas de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales: ¿cuántos ciclos límite (órbitas periódicas aisladas) puede tener un sistema polinómico de ecuaciones diferenciales en el plano en términos del grado? En las últimas décadas, esta pregunta ha inspirado múltiples líneas de investigación, muchas de las cuales buscan generalizar el problema a contextos más amplios o modelos más realistas.

En esta charla, presentamos el comportamiento de los ciclos límite en ecuaciones diferenciales a trozos en el plano, un tipo de sistemas que aparecen de forma natural en aplicaciones de control, electrónica y biología.

Utilizamos herramientas clásicas, como la aplicación de Poincaré y el estudio de órbitas periódicas mediante funciones de retorno, para abordar dos problemas:

1. Caracterización de los centros globales (todas las soluciones son periódicas) de la ecuación lineal a trozos $x' = a(t)|x| + b(t)$, cuando los coeficientes $a(t)$ y $b(t)$ son polinomios trigonométricos, bajo ciertas hipótesis genéricas.

Demostremos que los centros globales son precisamente aquellos determinados por la condición de composición sobre a y b ([1]). Es decir, la ecuación tiene un centro global si, y solo si, existen polinomios P , Q y un polinomio trigonométrico h tales que

$$a(t) = P(h(t))h'(t), \quad b(t) = Q(h(t))h'(t).$$

2. Cota superior para el número de ciclos límite: se establece una estimación explícita del número máximo de ciclos límite que pueden aparecer, en función de los parámetros del sistema y la estructura de la partición del plano.

Agradecimientos: RTF agradece al proyecto PID2023-151974NB-I00, financiado por el MICIU/AEI/10.13039/50110001 y cofinanciado por el FEDER, Unión Europea.

Referencias

- [1] Bravo, J.L., Trinidad-Forte, R.: *Global Centers in Piecewise linear Differential Equations in the Cylinder*, Preprint, arXiv:2503.03247.

Matemáticas para la eficiencia: simulaciones rápidas y modelos ligeros en ingeniería

José Carlos García Merino

jc.garcia@scc.uned.es

Departamento de Sistemas de Comunicación y Control. Universidad Nacional de Educación a Distancia

Palabras Clave: Modelos subrogados; Ciberseguridad; IoT; Ciencia de datos

AMS: 60J80

Resumen

Uno de los principales objetivos de matemáticos, científicos e ingenieros es desarrollar modelos capaces de describir fielmente diferentes realidades físicas. El desarrollo acelerado en los últimos años de la informática en general, y de la Inteligencia Artificial en particular, ha hecho posible abordar muchos problemas que antes se consideraban intratables. Los enfoques computacionales se han aplicado con éxito en un amplio rango de disciplinas, como la ingeniería civil, la ciencia de materiales o la ciberseguridad, entre otras. Sin embargo, la implementación de técnicas computacionales avanzadas necesita de una gran cantidad de recursos informáticos que no siempre están disponibles. Mi línea de investigación se centra en el desarrollo y optimización de modelos matemáticos para la resolución de diversos problemas de ingeniería.

Un problema común en la práctica es que las simulaciones de sistemas complejos, como por ejemplo del comportamiento mecánico de materiales de construcción, requieren habitualmente de varias horas de computación para resolver una única configuración experimental. Cuando se desea estudiar cómo varía esta respuesta frente a múltiples escenarios es necesario realizar miles de simulaciones, lo que puede traducirse fácilmente en varias semanas o meses de tiempo de cálculo, limitando la realización de análisis probabilísticos como métodos Montecarlo. Una solución eficaz este problema consiste en el desarrollo de *modelos subrogados*, es decir, modelos matemáticos entrenados para aproximar el resultado de una simulación compleja en un tiempo muy reducido. Gracias a ellos realizar tareas de inferencia o análisis de sensibilidad de forma mucho más eficiente.

Otra necesidad de optimización viene dada por la incapacidad de desplegar modelos matemáticos en dispositivos de bajo coste. Por ejemplo, en el campo de la ciberseguridad son cada vez más frecuentes los sistemas de detección de intrusos (IDSs) basados en Inteligencia Artificial. Sin embargo, debido a sus limitaciones computacionales, es complicado desplegar este tipo de herramientas en dispositivos del Internet de las Cosas (IoT). Esta limitación es especialmente preocupante si se tiene en cuenta que muchos dispositivos IoT manejan datos sensibles o controlan procesos críticos, y al no contar con medidas de protección avanzadas, se convierten en puntos vulnerables dentro de la red. Por tanto, optimizar los modelos de detección para que puedan funcionar eficientemente en estos entornos es una necesidad urgente para garantizar la seguridad tanto de la información como de las operaciones que dependen de estos dispositivos.

Agradecimientos: Este trabajo cuenta con el apoyo del Gobierno de España (a través del Instituto de Ciberseguridad de España, INCIBE), mediante la Cátedra Internacional “Smart Rural IoT and Secured Environments”, en el contexto del Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia financiado por la Unión Europea (NextGenerationEU/PRTR). El autor agradece también el apoyo de INTECCA, así como del grupo de investigación CiberCSI de la UNED.

Referencias

- [1] García-Merino, J.C., Calvo-Jurado, C., & García-Macías, E. (2022). *Polynomial chaos expansion for un-*

- certainty propagation analysis in numerical homogenization of 2D/3D periodic composite microstructures.* Compos. Struct., 300, 116130.
- [2] García-Merino, J.C., Calvo-Jurado, C., Martínez-Pañeda, E., & García-Macías, E. (2023). *Multielement polynomial chaos Kriging-based metamodeling for Bayesian inference of non-smooth systems.* Appl. Math. Model., 116, 510–531.
- [3] Li, J., Othman, M.S., Chen, H., & Yusuf, L.M. (2024). *Optimizing IoT intrusion detection system: feature selection versus feature extraction in machine learning.* J. Big Data, 11(1), 36.

Redes Neuronales para la ayuda al diagnóstico de la enfermedad de Parkinson

Daniel Francisco Merino Delgado

damerinod@unex.es

Departamento de Matemáticas. Universidad de Extremadura, Badajoz (España)

Palabras Clave: aprendizaje profundo; redes neuronales; espectrogramas; procesamiento de señales

AMS: 68T07, 68T20, 94A12

Resumen

La detección temprana, automática y no invasiva de la enfermedad de Parkinson (EP) es un factor clave en la calidad de vida del paciente. La evidencia médica [1] respalda que más de un 90 % de los sujetos con la EP presentan *disartria hipocinética*, una condición de la laringe que es susceptible de ser detectada a través de una grabación de voz. Por eso, se apunta al diseño de un sistema CAD (diagnóstico asistido por ordenador o *computer-aided diagnosis*) que puede tener por núcleo un modelo de aprendizaje automático.

En esta charla hablaremos de los modelos de aprendizaje automático conocidos como redes neuronales. Se presentarán los conceptos básicos para entender el funcionamiento estos modelos, además de los algoritmos necesarios para poder ajustar el modelo a unos datos determinados. Nos centraremos en redes neuronales con el objetivo de clasificar grabaciones de voz, incidiendo en las distintas opciones que ofrece: clasificar grabaciones «en bruto» (entendiendo la señal como una serie temporal), clasificar imágenes asociadas a la señal (espectrogramas) o vectores numéricos basados en características acústicas de la misma. La vía más extendida en la bibliografía es la basada en espectrogramas, y se expondrá parte del trabajo realizado en [2]. Por último, se comentarán las dificultades de trabajar con redes neuronales disponiendo de una muestra limitada y algunas técnicas para atacar el problema.

Agradecimientos: Esta investigación es parte de los proyectos R&D&I PID2021-122209OB-C31 y PID2021-122209OB-C32 financiados por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y ERDF: *A way of making Europe*.

Referencias

- [1] Atalar, M. S., Oguz, O., & Genc, G. (2023). "Hypokinetic Dysarthria in Parkinson's Disease: A Narrative Review." *The Medical Bulletin of Sisli Etfal Hospital*, 57(2), 163-170.
- [2] Delgado, D. F. M., Bazaga, M. J. R., Caballero, A. M., & Sánchez, C. J. P. (2024, May). "Convolutional neural networks to detect Parkinson's disease based on voice recordings and transfer learning." In *2024 IEEE International Conference on Evolving and Adaptive Intelligent Systems (EAIS)* (pp. 1-5). IEEE.

Espacios de Rochberg

Raúl Pino Velasco

pinoraul@uniovi.es

Departamento de Matemáticas. Universidad de Oviedo, Oviedo (España)

Palabras Clave: Espacio de Hilbert; Espacio de Rochberg; Inteporlación Compleja;

AMS: 46M18; 46B20; 46B70

Resumen

Sea $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{C}$ una función acotada y continua en la banda $\mathbb{S} = \{x + iy \in \mathbb{C} : 0 \leq x \leq 1\}$ que es analítica en el interior de $\mathbb{S}$. El *Teorema de las tres líneas de Hadamard* [1, Lemma 1.1.2] establece que los valores de f en cualquier recta vertical de $\mathbb{S}$ están controlados por los valores de f en la frontera; más precisamente, si denotamos por $M(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} |f(x + iy)|$ entonces M es una función log-convexa en $[0, 1]$:

$$M(x) \leq M(0)^{1-x} M(1)^x \quad \text{para cada } x \in [0, 1]. \quad (0.0.1)$$

La estimación (0.0.1) puede generalizarse para funciones Banach-valuadas: si $(B, \|\cdot\|_B)$ es un espacio de Banach complejo y denotamos por $\mathcal{H}(B)$ el conjunto de las funciones $f : \mathbb{S} \rightarrow B$ que son $\|\cdot\|_B$ -continuas, $\|\cdot\|_B$ -acotadas en $\mathbb{S}$ y $\|\cdot\|_B$ -analíticas en el interior de $\mathbb{S}$ entonces

$$\|f(x)\|_B \leq \left(\sup_{y \in \mathbb{R}} \|f(iy)\|_B \right)^{1-x} \left(\sup_{y \in \mathbb{R}} \|f(1 + iy)\|_B \right)^x \quad \text{si } f \in \mathcal{H}(B) \text{ y } x \in [0, 1]. \quad (0.0.2)$$

Empleando la estimación (0.0.2), el espacio de Hilbert ℓ_2 se puede representar como las *evaluaciones* de ciertas funciones analíticas ℓ_∞ -valuadas: denotemos por $\mathcal{H}(\ell_1, \ell_\infty)$ a las funciones $f \in \mathcal{H}(\ell_\infty)$ tales que la aplicación $y \in \mathbb{R} \mapsto f(iy) \in \ell_1$ es $\|\cdot\|_1$ -acotada y $\|\cdot\|_1$ -continua. En tal caso [1, 5.1.1]:

$$\ell_2 = \left\{ f\left(\frac{1}{2}\right) \in \ell_\infty : f \in \mathcal{H}(\ell_1, \ell_\infty) \right\}.$$

Teniendo en cuenta lo anterior, Rochberg [3] definió para cada $n \geq 1$ el espacio

$$\ell_2^{(n)} = \left\{ \left(\frac{f^{(n-1)}(\frac{1}{2})}{n!}, \dots, f'(1/2), f(1/2) \right) \in \ell_\infty^n : f \in \mathcal{H}(\ell_1, \ell_\infty) \right\}$$

formado por los n primeros coeficientes de Taylor de las funciones analíticas de $\mathcal{H}(\ell_1, \ell_\infty)$.

En esta charla revisaremos algunas de las propiedades fundamentales de $\ell_2^{(n)}$ obtenidas en [2] y, empleando técnicas de variable compleja y homología en espacios de Banach, veremos cómo los espacios definidos por Rochberg pueden entenderse como generalizaciones naturales del espacio de Hilbert ℓ_2 .

Referencias

- [1] Bergh, J., Löfström, J. *Interpolation Spaces. An Introduction*. Grundlehren Math. Wiss. 223. Springer, 1976.
- [2] Castillo, J.M.F., González, M., Pino, R. (2024). *The structure of Rochberg spaces*. J. Funct. Anal., 287, 110489.
- [3] Rochberg, R. (1996). *Higher order estimates in complex interpolation theory*. Pacific J. Math., 174, 247-267.

El problema de la Audibilidad en Geometría Riemanniana

José Manuel Fernández Barroso

ferbar@unex.es

Departamento de Matemáticas. Universidad de Extremadura, Badajoz (España)

Palabras Clave: Geometría Riemanniana; Operador de Laplace; Propiedades Symmetric-like; Variedades isospectrales; Audibilidad.

AMS: 58J53; 53C25; 58J50; 53C30

Resumen

En 1966, Kac formuló su ya famosa pregunta "*¿se puede oír la forma de un tambor?*"[1]. Teniendo en cuenta que el sonido de un instrumento, como propiedad física, viene determinado (grosso modo) por los autovalores del operador de Laplace, esta pregunta se tradujo a si sería posible determinar la forma de un tambor conocidos los autovalores del operador de Laplace en la superficie del tambor. Fue en los inicios de la década de los 90, con el artículo de Gordon, Webb y Wolpert [2] donde demuestran que existe un par de dominios planas con el mismo espectro del laplaciano ("tambores que producen el mismo sonido"), pero con distinta forma (Figure 1). Esto respondió negativamente a la pregunta de Kac. Desde entonces aumentó el interés por el estudio de qué propiedades geométricas pueden ser determinadas (o no), por el espectro del laplaciano, utilizando distintos problemas de autovalores (por ejemplo Neumann, Dirichlet o cerrado). A este problema se le conoce como el problema de la Audibilidad.

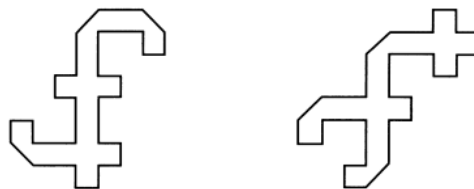


Figura 1: Dominios planos con el mismo espectro pero distinta forma, contruidos en [3].

En general, una propiedad se dice que es inaudible si se puede encontrar un par de variedades Riemannianas con el mismo espectro, pero que difieran en dicha propiedad. En esta charla, veremos una introducción al problema de la audibilidad, mostrando algunas propiedades geométricas que han sido demostradas como audibles y otras inaudibles. A lo largo de mi tesis, se demuestra la inaudibilidad de distintas propiedades *Symmetric-like* (propiedades que generalizan a *locally symmetric*). Para terminar la charla, resumiré algunos resultados obtenidos en [4, 5, 6] haciendo uso de distintas variedades Riemannianas isospectrales.

Agradecimientos: Trabajo conjunto con Teresa Arias Marco.

Referencias

- [1] Kac, M. (1966). Can one hear the shape of a drum?. *The american mathematical monthly*, 73(4P2), 1-23.
- [2] Gordon, C., Webb, D., Wolpert, S. (1992). One cannot hear the shape of a drum. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 27(1), 134-138.

- [3] Gordon, C., Webb, D., Wolpert, S. (1992). Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds. *Inventiones mathematicae*, 110(1), 1-22.
- [4] Arias-Marco T., Fernández-Barroso JM. Inaudibility of k-D'Atri Properties. *Symmetry*. 2019; 11(10):1316. <https://doi.org/10.3390/sym11101316> 315-322.
- [5] Arias-Marco, T., Fernández-Barroso, JM. Non-Compact Inaudibility of Weak Symmetry and Commutativity via Generalized Heisenberg Groups. *Bull. Iran. Math. Soc.* 50, 71 (2024). <https://doi.org/10.1007/s41980-024-00900-0>
- [6] Arias-Marco, T., Fernández-Barroso, JM. (2025). Inaudibility of naturally reductive property. *arXiv pre-print arXiv:2502.10332*.

Cóputas y Valores Extremos Aplicados a Modelos Climáticos

Mario Martínez Pizarro

mariomp@unex.es

Departamento de Matemáticas. Universidad de Extremadura, Badajoz (España)

Palabras Clave: valores extremos; cóputas; modelos climáticos; modelos jerárquicos Bayesianos

AMS: 60J80

Resumen

En el contexto actual del cambio climático es crucial estudiar eventos meteorológicos extremos, como lluvias torrenciales, olas de calor o periodos prolongados de sequía, debido a su enorme impacto socioeconómico y ambiental. Estos fenómenos, caracterizados por su baja frecuencia pero alta severidad, se clasifican como eventos extremos.

El análisis de estos eventos se ha abordado, generalmente, mediante la Teoría de Valores Extremos (EVT) que se centra, fundamentalmente, en el comportamiento de las colas de distribuciones univariantes. Esta teoría se divide, principalmente, en dos estrategias diferentes: el método de máximos de bloque y el método de excesos de un umbral. No obstante, los fenómenos climáticos suelen exhibir una fuerte dependencia espacial y temporal, por lo que es necesario un enfoque multivariante para capturar adecuadamente la complejidad de estos eventos. Una herramienta clave en este contexto es la Teoría de Cóputas, que permite construir modelos multivariantes separando la estructura de dependencia de las distribuciones marginales. Las cóputas modelan la relación entre variables climáticas, como la temperatura o la precipitación, aunque éstas tengan distribuciones distintas, cuyos parámetros pueden variar espacialmente, por ejemplo, en función de la ubicación geográfica.

Este enfoque es especialmente relevante en climatología, donde variables climáticas con distribuciones heterogéneas pueden mostrar una fuerte dependencia en las colas, esto es, una alta probabilidad conjunta de valores extremos. Una estrategia interesante consiste en utilizar cóputas de valores extremos (EVC) para modelar conjuntamente los máximos de temperatura y capturar la dependencia espacial entre estaciones meteorológicas. Para ello, se emplean habitualmente Modelos Jerárquicos Bayesianos que permiten involucrar otros modelos para las relaciones entre los parámetros de las distribuciones de las observaciones, introduciendo cierta jerarquía entre parámetros. Además, estos modelos permiten una gran flexibilidad en el proceso de inferencia de los parámetros, y para modelar y pronosticar eventos extremos en climatología.

Agradecimientos: Esta investigación está financiada por la Consejería de Educación, Ciencia y Formación Profesional a través del proyecto GR24013.

Referencias

- [1] García, J.A., Pizarro, M.M., Acero, F.J., Parra, M.I. (2021). *A Bayesian Hierarchical Spatial Copula Model: An Application to Extreme Temperatures in Extremadura (Spain)*. Atmosphere, 12(7), 897. <https://doi.org/10.3390/atmos12070897>
- [2] García, J.A., Acero, F.J., Pizarro, M.M., Lara, M. (2024). *A Bayesian hierarchical spatio-temporal model for summer extreme temperatures in Spain*. Stoch Environ Res Risk Assess, 38, 3393-3410, <https://doi.org/10.1007/s00477-024-02754-8>

Explosiones por doquier. Resolución de singularidades y otros problemas

Carlos Jesús Moreno Ávila

cjmoravi@unex.es

Departamento de Matemáticas. Universidad de Extremadura, Badajoz (España)

Palabras Clave: Singularidades; Conjetura de Nagata;

AMS: 14C20,14E15,14C22,13A18

Resumen

En esta charla hablaremos de la resolución de singularidades de una curva plana mediante el proceso de explosiones, o blowups. Esta técnica permite entender y suavizar los puntos donde la recta tangente a la curva no está bien definida. Las explosiones en puntos aparecen en otros problemas de gran interés que continúan, en general, abiertos, como es la conjetura de Nagata. Abordaremos este y otros problemas de interés en el área de geometría algebraica.

Agradecimientos: El ponente de esta charla agradece la financiación a través de la ayuda PID2022-138906NB-C22 financiado por MICIU/AEI/ 10.13039/ 501100011033 y por ERDF/EU. También ha sido cofinanciado al 85 % por la Unión Europea, el Fondo Europeo de Desarrollo Regional y la Junta de Extremadura, la Autoridad de Gestión y el Ministerio de Hacienda, a través del proyecto GR24068.

Referencias

- [1] Casas-Alvero, E. (2000). *Singularities of plane curves*. London Math. Soc. Lect. Notes Ser. Cambridge Univ. Press, volume 276.
- [2] Galindo, C., Monserrat, F., Moreno-Ávila, C.-J., Moyano-Fernández, J.-J. (2025). *On the valuative Nagata Conjecture*. Res. Math. Sci., 12:18.
- [3] Nagata, M. (1959). *On the 14-th problem of Hilbert*. Amer. J. Math., 81, 766-772.

Día 2: 20 de junio

El Espacio de Banach de Cuasinormas

Daniel Morales González

danmorg@unex.es

Departamento de Matemáticas. Universidad de Extremadura, Badajoz (España)

Resumen

En esta charla, veremos que el conjunto de cuasinormas continuas en un espacio vectorial de dimensión finita, después de hacer cociente por las dilataciones, tiene una estructura natural de espacio de Banach.

Embeddings, similitud semántica y LLMs: Cálculo matemático y aplicaciones en procesamiento de lenguaje natural

Adrián Izquierdo Abril

adriania@unex.es

Departamento de Matemáticas. Universidad de Extremadura, Cáceres (España)

Palabras Clave: Modelos de Lenguaje; Word Embeddings; Vectores Semánticos; Procesamiento del Lenguaje Natural

AMS: 60J80

Resumen

La inteligencia artificial, y en particular los modelos de lenguaje de gran tamaño (*Large Language Models*, LLM), están adquiriendo un papel cada vez más relevante en múltiples sectores de la sociedad. Desde el desarrollo de *chatbots* personalizados hasta la automatización de tareas complejas en entornos profesionales, estas tecnologías están transformando la forma en que interactuamos con la información.

Mis líneas de investigación se han centrado en el estudio de los LLMs y en el desarrollo e implementación de una aplicación basada en esta tecnología. Dicha aplicación permite, por un lado, la generación automática de fichas resumen a partir de convocatorias y sus bases reguladoras, y por otro, la incorporación de un chatbot personalizado, capaz de responder de manera precisa a cualquier consulta realizada sobre el contenido de un documento.

El principal desafío en el desarrollo de esta aplicación ha sido garantizar la privacidad de la información proporcionada por el usuario, mediante su ejecución en un entorno local, sin comprometer el rendimiento ni los tiempos de respuesta [1].

Este desafío ha implicado la necesidad de llevar a cabo un estudio detallado de todo el proceso de generación de respuestas, desde la selección y evaluación del modelo de cálculo de embeddings hasta la elección del LLM más adecuado, considerando criterios de precisión, eficiencia y ejecución local.

El primer paso del flujo del programa —y en el que se centrará esta ponencia— consiste en la transformación del documento seleccionado en una representación matemática, mediante el cálculo de sus vectores de embeddings. Esta representación vectorial es fundamental para que el modelo pueda recuperar información relevante y generar respuestas precisas.

Para llevar a cabo este proceso, el documento debe ser fragmentado en secciones más pequeñas, sobre las cuales se aplica un modelo de embedding capaz de reducir la dimensionalidad y generar un vector representativo para cada fragmento [2]. Esta representación permite que fragmentos con contenido semántico similar estén asociados a vectores cercanos en el espacio vectorial, lo cual es esencial para que el modelo pueda recuperar información relevante y generar respuestas coherentes.

Cada vez que se realiza una consulta al modelo, dicha solicitud se transforma en un vector de embedding que permite compararla con los vectores previamente generados para los fragmentos del documento. A partir de esta comparación, basada en la similitud de coseno, se recuperan únicamente los fragmentos más relevantes —normalmente un número reducido— que contienen la información más relacionada con la consulta [3]. Este proceso no solo mejora la precisión de las respuestas, sino que también permite reducir los costes computacionales, ya que el modelo de lenguaje solo recibe como contexto los fragmentos más significativos, evitando procesar el documento completo.

Todo este proceso pone de manifiesto la relevancia de una representación matemática adecuada del lenguaje como base fundamental para obtener resultados precisos y eficientes en tareas de procesamiento de lenguaje natural.

Agradecimientos: Quiero expresar mi agradecimiento a Carlos Javier Pérez Sánchez y a Miguel Ángel Vega Rodríguez por su constante guía y seguimiento en el proyecto realizado.

Este proyecto ha recibido cofinanciación del Programa Europa Digital (DIGITAL) de la Unión Europea, en virtud del acuerdo de subvención n.º 101083667-Tech4EfficiencyEDIH. Está cofinanciado por el Ministerio de Industria, Comercio y Turismo del Gobierno de España, en el marco de los fondos «Next Generation/PRTR».

Referencias

- [1] Maiya, A. S. (2025). *OnPrem.LLM: A Privacy-Conscious Document Intelligence Toolkit*. Institute for Defense Analyses, Alexandria, VA, USA.
- [2] Zhang, C., Peng, B., Sun, X., et al. (2024). *From Word Vectors to Multimodal Embeddings: Techniques, Applications, and Future Directions for Large Language Models*.
- [3] Mikolov, T., Chen, K., Corrado, G., & Dean, J. (2013). *Efficient Estimation of Word Representations in Vector Space*. Google Inc., Mountain View, CA.

Cómo mantener un sistema bajo la combinación de procesos de degradación

Emmanuel Moreno Mejía

emorenohp@alumnos.unex.es

Departamento de Matemáticas. Universidad de Extremadura (España)

Palabras Clave: Mantenimiento imperfecto; Degradación múltiple; Vida Útil Restante (RUL); Proceso de Wiener

AMS: 90B25

Resumen

Los sistemas industriales, por ejemplo aerogeneradores o grandes estructuras marinas y terrestres, suelen estar sometidos a procesos de degradación como la erosión, la corrosión o la aparición de grietas. Estos tipos de deterioro, cuando actúan de manera combinada, reducen significativamente la eficiencia operativa del sistema y pueden provocar un fallo prematuro del sistema.

Este trabajo introduce un nuevo modelo de degradación en el que los modos de degradación individuales se describen mediante procesos de Wiener. Se formula un proceso de degradación que representa el efecto combinado de estos modos, y se define el fallo del sistema como la superación de un umbral crítico. Se incorporan acciones de mantenimiento imperfectas y periódicas. En dicho modelo, el efecto del mantenimiento (porcentaje de reducción de la degradación) es función tanto de un parámetro de reducción del deterioro como del número de intervenciones de mantenimiento previas, lo que refleja escenarios de reparación más realistas. La distribución de la vida útil del sistema se obtiene a partir de este esquema de mantenimiento imperfecto, proporcionando expresiones para la probabilidad de supervivencia a través de múltiples ciclos de mantenimiento [1].

Además, se proponen dos políticas de mantenimiento. Estas políticas utilizan la vida útil restante (RUL) derivada [3] y el estado de degradación actual en los puntos de inspección para decidir de forma óptima entre el reemplazamiento correctivo, el reemplazamiento preventivo o la reparación imperfecta, minimizando así los costes operativos a largo plazo. El marco se amplía para abordar sistemas en los que el fallo puede desencadenarse bien porque la degradación global del sistema alcance su límite, bien porque la degradación de un componente crítico específico supere su propio umbral individual.

Referencias

- [1] Kijima, M. (1989). Some results for repairable systems with general repair. *Journal of Applied Probability*, 26(1), 89–102.
- [2] Lewanowics, S. (1997). Generalized Watson's summation formula for ${}_3F_2(1)$. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 86(2), 375–386.
- [3] Zhang, Z., Si, X., Hu, C. and Lei, Y. (2018). Degradation data analysis and remaining useful life estimation: A review on Wiener-process-based methods. *European Journal of Operational Research*, 27(3), 775–796.

Algunos problemas dinámicos en el plano

Luis Ángel Calderón Pérez

l.calderon@uib.es

Departament de Matemàtiques i Informàtica. Universitat de les Illes Balears, Palma (España)

Palabras Clave: Sistemas dinámicos; Sistemas diferenciales polinómicos planos

AMS: 34C07, 34C23, 34C25

Resumen

El primer propósito de esta charla consiste en comentar los principales problemas clásicos relativos a los sistemas diferenciales autónomos polinómicos en el plano, es decir, sistemas diferenciales de la forma:

$$x' = P(x, y), \quad y' = Q(x, y)$$

donde $P(x, y), Q(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$.

En particular, el problema XVI de Hilbert y el problema de centro-foco de Poincaré. Se ilustrará la dificultad de estos problemas, algunos enfoques para abordarlos (como las ecuaciones de Abel) y algunos trabajos que he realizado en este contexto.

Por un lado, el estudio de estos problemas en la familia más sencilla de sistemas rígidos (esto es, sistemas con velocidad angular constante) que no tienen parámetros rotatorios, que controlan la evolución de ciclos límite del sistema y suelen ser una herramienta básica para buscarlos. En particular, estudiamos la familia:

$$x' = -y + xF(x, y), \quad y' = x + yF(x, y)$$

donde $F(x, y) = a_1x + a_2y + b_1x^3 + b_2x^2y + b_3xy^2 + b_4y^3$.

En este trabajo damos explícitamente las condiciones de centro para esta familia de sistemas rígidos; obtenemos algunos resultados sobre su número de ciclos límite; y estudiamos su comportamiento sobre la esfera de Poincaré, dejando algunas preguntas abiertas.

Por otro lado, se presentará un contexto similar en apariencia pero distinto: los sistemas planos lineales a trozos. Aquí, usamos una caracterización integral desarrollada por F. Carmona y F. Fernández-Sánchez para facilitar el uso de las semiaplicaciones de Poincaré, aplicada en este caso a sistemas bizonales en los que se pretende simplificar el estudio de algunas de las bifurcaciones clásicas para sistemas de este tipo.

En particular, la Foco-Centro-Ciclo límite (cambiando la estabilidad del foco) o bifurcaciones del tipo Hopf-like (desplazando el punto de equilibrio o cambiando la estabilidad de la singularidad sobre la recta de separación). Mediante la aplicación de la caracterización integral, se recuperan resultados ya conocidos de forma más limpia y compacta.

Agradecimientos: Indica aquí los agradecimientos

Referencias

- [1] V. Carmona, F. Fernández-Sánchez, *Integral characterization for Poincaré half-maps in planar linear systems*, Journal of Differential Equations, **305**, (2021), 319-346.
- [2] A. Gasull, *Some open problems in low dimensional dynamical systems*, SeMA Journal, **78**, (2021), 233-269.
- [3] A. Gasull, J. Torregrosa. *Some results on rigid systems*. In International Conference on Differential Equations (Equadiff-2003), 340-345. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2005.

Nuevos modelos predictivos de ateromatosis en individuos asintomáticos de mediana edad

Manuel Martí Antonio

mmartia@unex.es

Departamento de Matemáticas. Universidad de Extremadura, Plasencia (España)

Palabras Clave: enfermedad cardiovascular; árboles de clasificación, tamaño del efecto

AMS: 62H30

Resumen

Las enfermedades cardiovasculares son la primera causa de muerte en España, especialmente la ateromatosis, que se relaciona con la acumulación de colesterol en las arterias. Se desarrolla de manera subclínica antes de manifestarse como un evento cardiovascular. La escala recomendada para estimar el riesgo cardiovascular es Systematic COronary Risk Evaluation (SCORE). Ésta se calcula mediante la edad, sexo, tabaquismo, presión sanguínea y colesterol, siendo menos precisa en mujeres y jóvenes. También se emplean otras técnicas como la ecografía vascular, que mejora el diagnóstico a un coste mayor. No obstante, todas ellas omiten factores de riesgo que pueden obtenerse mediante pruebas de laboratorio y el historial clínico de los pacientes.

Por este motivo, sería útil disponer de métodos alternativos para estimar el riesgo cardiovascular. Se pretende obtener un modelo estadístico de cribado de ateromatosis severa, definida como ≥ 3 territorios con placa. Con este modelo se busca diferenciar a las personas con un diagnóstico claro de ausencia o presencia de ateromatosis severa, de aquéllas con mayor incertidumbre que requieren una exploración más exhaustiva. De esta forma, se reducirán costes y recursos.

Para ello se ha utilizado la cohorte de ILERVAS [1], de la cual se han seleccionado variables fácilmente obtenibles como predictores potenciales. Éstas fueron la edad, índice de masa corporal, tasa de filtrado glomerular, colesterol total, índice cintura-altura, presión diastólica, presión sistólica, ácido úrico, tabaquismo, dislipemia e hipertensión. El modelo consistió en un árbol de clasificación [2] que se calibró en grupos de riesgo y se validó externamente en la cohorte de NEFRONA [3]. Sus estimaciones se compararon con las obtenidas con un modelo basado en el SCORE, donde el árbol fue significativamente más preciso en mujeres en bajo y alto riesgo cardiovascular.

De forma paralela, se ha utilizado la cohorte de seguimiento de ILERVAS para investigar si la altitud influye en el aumento del área de placa en 4 años. Se ha clasificado a los individuos según la altitud mediana del municipio de residencia (≤ 421 ó >421 metros), teniendo en cuenta si al inicio del estudio presentaron o no placa de ateroma. Las diferencias se han analizado mediante la prueba ANOVA de medidas repetidas y regresión lineal múltiple. Se ha calculado la importancia de las variables y su dominancia (general y completa). Los resultados sugieren que el área de placa aumenta significativamente a mayor altitud en los hombres con placa basal.

Agradecimientos: Marcelino Bermúdez López y Carlos Javier Pérez Sánchez (directores de tesis). José Manuel Valdivielso Revilla, Eva Castro Boque y resto de miembros del Grupo de investigación traslacional vascular y renal del IRBLleida

Referencias

- [1] Betriu, À. et al (2016). *Estudio de intervención aleatorizado para evaluar la prevalencia de enfermedad*

- ateromatosa y renal ocultas y su impacto en la morbimortalidad: Proyecto ILERVAS*. Nefrología, 36-4, 389-396. <https://doi.org/10.1016/j.nefro.2016.02.008>.
- [2] Bermúdez-López et al. (2022). *Development and Validation of a Personalized, Sex-Specific Prediction Algorithm of Severe Atheromatosis in Middle-Aged Asymptomatic Individuals: The ILERVAS Study*. Frontiers in Cardiovascular Medicine. 9. 895917. 10.3389/fcvm.2022.895917.
- [3] Junyent, M. et al. et al. (2010). *Predicting cardiovascular disease morbidity and mortality in chronic kidney disease in Spain. the rationale and design of NEFRONA: a prospective, multicenter, observational cohort study.*. BMC Nephrol. (2010) 11:14. doi: 10.1186/1471-2369-11-14

