

El problema de la Audibilidad en Geometría Riemanniana

José Manuel Fernández Barroso

ferbar@unex.es

Departamento de Matemáticas. Universidad de Extremadura, Badajoz (España)

Palabras Clave: Geometría Riemanniana; Operador de Laplace; Propiedades Symmetric-like; Variedades isospectrales; Audibilidad.

AMS: 58J53; 53C25; 58J50; 53C30

Resumen

En 1966, Kac formuló su ya famosa pregunta "*¿se puede oír la forma de un tambor?*" [1]. Teniendo en cuenta que el sonido de un instrumento, como propiedad física, viene determinado (grosso modo) por los autovalores del operador de Laplace, esta pregunta se tradujo a si sería posible determinar la forma de un tambor conocidos los autovalores del operador de Laplace en la superficie del tambor. Fue en los inicios de la década de los 90, con el artículo de Gordon, Webb y Wolpert [2] donde demuestran que existe un par de dominios planos con el mismo espectro del laplaciano ("tambores que producen el mismo sonido"), pero con distinta forma (Figure 1). Esto respondió negativamente a la pregunta de Kac. Desde entonces aumentó el interés por el estudio de qué propiedades geométricas pueden ser determinadas (o no), por el espectro del laplaciano, utilizando distintos problemas de autovalores (por ejemplo Neumann, Dirichlet o cerrado). A este problema se le conoce como el problema de la Audibilidad.

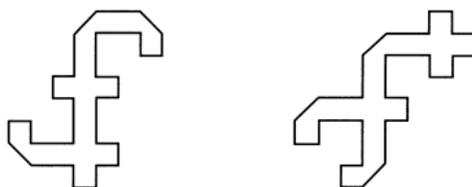


Figure 1: Dominios planos con el mismo espectro pero distinta forma, construidos en [3].

En general, una propiedad se dice que es inaudible si se puede encontrar un par de variedades Riemannianas con el mismo espectro, pero que difieran en dicha propiedad. En esta charla, veremos una introducción al problema de la audibilidad, mostrando algunas propiedades geométricas que han sido demostradas como audibles y otras inaudibles. A lo largo de mi tesis, se demuestra la inaudibilidad de distintas propiedades *Symmetric-like* (propiedades que generalizan a *locally symmetric*). Para terminar la charla, resumiré algunos resultados obtenidos en [4, 5, 6] haciendo uso de distintas variedades Riemannianas isospectrales.

Agradecimientos: Trabajo conjunto con Teresa Arias Marco.

Referencias

- [1] Kac, M. (1966). Can one hear the shape of a drum?. *The american mathematical monthly*, 73(4P2), 1-23.

- [2] Gordon, C., Webb, D., Wolpert, S. (1992). One cannot hear the shape of a drum. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 27(1), 134-138.
- [3] Gordon, C., Webb, D., Wolpert, S. (1992). Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds. *Inventiones mathematicae*, 110(1), 1-22.
- [4] Arias-Marco T., Fernández-Barroso JM. Inaudibility of k-D'Atri Properties. *Symmetry*. 2019; 11(10):1316. <https://doi.org/10.3390/sym11101316> 315-322.
- [5] Arias-Marco, T., Fernández-Barroso, JM. Non-Compact Inaudibility of Weak Symmetry and Commutativity via Generalized Heisenberg Groups. *Bull. Iran. Math. Soc.* 50, 71 (2024). <https://doi.org/10.1007/s41980-024-00900-0>
- [6] Arias-Marco, T., Fernández-Barroso, JM. (2025). Inaudibility of naturally reductive property. *arXiv preprint arXiv:2502.10332*.